Μάθημα 6ο 03/04/17

(Π)
$\max \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}$
$A\underset{\sim}{x} \le \underset{\sim}{b}$
$\underset{\sim}{x} \geq \underset{\sim}{0}$

(Δ)
$\min \underset{\sim}{b}'\underset{\sim}{w}$
$A^T\underset{\sim}{w} \geq \underset{\sim}{c}$
$\underset{\sim}{w} \geq \underset{\sim}{0}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$\max 2x_1 + x_2$
$x_1 + x_2 = 2$
$2x_1 - x_2 \geq 3$
$x_1 - x_2 \le 1$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R}$

$\max 2x_1 + x_2$
$x_1 + x_2 \le 2$
$-x_1 - x_2 \le -2$
$-2x_1 + x_2 \le -3$
$x_1 - x_2 \le 1$
$x_1 \geq 0,\ \in \mathbb{R}$

(Π)
$\max 2x_1 + x_2' - x_2''$
$w_1\quad x_1 + x_2' - x_2'' \le 2$
$w_2\quad -x_1 - x_2' + x_2'' \le -2$
$w_3\quad -2x_1 + x_2' - x_2'' \le -3$
$w_4\quad x_1 - x_2' + x_2'' \le 1$
$x_1, x_2', x_2'' \geq 0.$

(Δ)
$\min 2w_1 - 2w_2 - 3w_3 + w_4$
$w_1 - w_2 - 2w_3 + w_4 \geq 2$
$w_1 - w_2 + w_3 - w_4 \geq 1$
$-w_1 + w_2 - w_3 + w_4 \geq -1$
$w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$

$w_1' = w_1 - w_2$ οπότε

$\min 2w_1' - 3w_3 + w_4$
$w_1' - 2w_3 + w_4 \geq 2$
$w_1' + w_3 - w_4 \geq 1$
$-w_1' - w_3 + w_4 \geq -1$
$w_1' \in \mathbb{R},\ w_3, w_4 \geq 0.$

$\min 2w_1' - 3w_3 + w_4$
$w_1' - 2w_3 + w_4 \geq 2$
$w_1' + w_3 - w_4 \geq 1$
$w_1' \in \mathbb{R},\ w_3, w_4 \geq 0$
$w_3' = -w_3$

$\min 2w_1' + 3w_3' + w_4$
$w_1' + 2w_3' + w_4 \geq 2$
$w_1' + w_3' - w_4 \geq 1$
$w_1' \in \mathbb{R},\ w_3' \le 0,\ w_4 \geq 0$

Αλλιώς,

(Π)	(Δ)
$\max 2x_1+x_2$	$\min 2w_1+3w_2+w_3$
$w_1 \quad x_1+x_2=2$	$w_1+2w_2+w_3 \geq 2$
$w_2 \quad 2x_1-x_2 \geq 3$	$w_1-w_2-w_3=1$
$w_3 \quad x_1-x_2 \leq 1$	$w_1 \in \mathbb{R},\ w_2 \leq 0,\ w_3 \geq 0$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \in \mathbb{R}$	

Κατασκευαστικό πρότυπο

(Π)		(Δ)
$\max z$		$\min z$
i περιορισμός $\leq$		$w_i \geq 0$
i περιορισμός $=$	$\Leftrightarrow$	$w_i \in \mathbb{R}$
i περιορισμός $\geq$		$w_i \leq 0$
$x_i \geq 0$		i περιορισμός $\geq$
$x_i \in \mathbb{R}$		i περιορισμός $=$
$x_i \leq 0$		i περιορισμός $\leq$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

(Π)	(Δ)
$\max 10x_1-4x_2+7x_3$	$\min 25w_1+25w_2+40w_3+90w_4+20w_5$
$w_1 \quad x_1-2x_2+3x_3 \leq 25$	$w_1+5w_2+w_3+2w_4+3w_5=10$
$w_2 \quad 5x_1+x_2+2x_3 \geq 25$	$-2w_1+w_2+w_3-w_4-w_5 \geq -4$
$w_3 \quad x_1+x_2+x_3=40$	$3w_1+2w_2+w_3+w_4+w_5 \geq 7$
$w_4 \quad 2x_1-x_2+x_3 \leq 90$	$w_1 \geq 0,\ w_2 \leq 0,\ w_3 \in \mathbb{R},\ w_4, w_5 \geq 0.$
$w_5 \quad 3x_1-x_2+x_3 \leq 20$	
$x_1 \in \mathbb{R},\ x_2, x_3 \geq 0.$	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

(Π)	(Δ)
$\min 2x_1+3x_2-4x_3+5x_4$	$\max 19w_1+22w_2+38w_3$
$w_1 \quad 3x_1+2x_2+x_3-2x_4 \leq 19$	$3w_1+2w_2+w_3 \leq 2$
$w_2 \quad 2x_1+3x_2-x_3+3x_4 \geq 22$	$2w_1+3w_2-w_3 \leq 3$
$w_3 \quad x_1-x_2+2x_3-3x_4=38$	$w_1-w_2+2w_3 \leq -4$
	$-2w_1+3w_2-3w_3 \leq 5$
	$w_1 \leq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3 \in \mathbb{R}$

(Π)

$\max c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1$

$a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2$

$\vdots \qquad \vdots$

$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn} \le b_m$

$x_i \geq 0$

$\max \sum \frac{\alpha\xi\acute{\iota}\alpha}{\pi\rho o\ddot{\iota}\acute{o}\nu\, j}\, \pi\rho o\ddot{\iota}\acute{o}\nu\, j = \alpha\xi\acute{\iota}\alpha$

$\sum_{j=1}^{n} \frac{\pi\acute{o}\rho o\varsigma\, i}{\pi\rho o\ddot{\iota}\acute{o}\nu\, j}\, \pi\rho o\ddot{\iota}\acute{o}\nu\, j \le \pi\acute{o}\rho o\varsigma\, i$

(Δ)

$\min \sum b_iw_i = \sum \pi\acute{o}\rho o\varsigma\, i\; w_i$

$a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \cdots + a_{m1}w_m \geq c_1$

$\vdots$

$a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \cdots + a_{mi}w_m \geq c_i$

$\vdots$

$a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \cdots + a_{mn}w_m \geq c_n$

$\sum \frac{\pi\acute{o}\rho o\varsigma\, i}{\pi\rho o\ddot{\iota}\acute{o}\nu\, j}\, w_i \geq \frac{\alpha\xi\acute{\iota}\alpha}{\pi\rho o\ddot{\iota}\acute{o}\nu\, j}, \quad w_i = \frac{\alpha\xi\acute{\iota}\alpha}{\pi\acute{o}\rho o\varsigma\, i}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Πρώτη ύλη	Θρανίο	Τραπέζι	Καρέκλα	Διαθεσιμότητα
Ξυλεία (m^3)	8	6	1	48
Κατάσκευη (ώρες)	2	1.5	0.5	8
Φινίρισμα (ώρες)	4	2	1.5	20
Τιμή πώλησης	60	30	20	

x_1: αριθμός θρανίων
x_2: αριθμός τραπεζιών
x_3: αριθμός καρεκλών

$\max 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

$8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48$ (ξυλεία)

$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \le 8$ (κατασκευή)

$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \le 20$ (φινίρισμα)

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\min 48w_1 + 8w_2 + 20w_3$

$8w_1 + 2w_2 + 4w_3 \geq 60$

$6w_1 + 1.5w_2 + 2w_3 \geq 30$

$w_1 + 0.5w_2 + 1.5w_3 \geq 20$

$w_1, w_2, w_3 \geq 0$

- Αν $\underset{\sim}{x}$ μια εφικτή λύση του (Π) και $\underset{\sim}{w}$ μια εφικτή λύση του (Δ) τότε $\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x} \le \underset{\sim}{b}'\underset{\sim}{w}$ (ασθενής δυϊκότητα).

$\underset{\sim}{x}$ λύση του (Π)

$$A\underline{x} \le \underline{b} \qquad \underline{w}'A\underline{x} \le \underline{w}'\underline{b} = \underline{b}'\underline{w}$$
$$\underline{w} \ge \underline{0}$$

$\underline{w}$ λύση του (Δ) $\qquad \underline{c}'\underline{x} \le \underline{b}'\underline{w}$

$$\left.\begin{array}{l} A^T\underline{w} \ge \underline{c} \\ \underline{x} \ge \underline{0} \end{array}\right\} \quad \underline{x}'A^T\underline{w} \ge \underline{x}'\underline{c} \Rightarrow \underline{w}'A\underline{x} \ge \underline{c}'\underline{x}$$

- Αν $\overline{x}$ μια εφικτή λύση του (Π) και $\overline{w}$ μια εφικτή λύση του (Δ) έτσι ώστε $\overline{z} = \underline{c}'\overline{\underline{x}} = \underline{b}'\overline{\underline{w}} = \overline{u}$, τότε $\overline{x}$ και $\overline{w}$ είναι άριστες λύσεις των (Π) και (Δ) αντίστοιχα.

$\underline{x}$, $\underline{w}$ τυχαίες λύσεις των (Π) και (Δ) αντίστοιχα.

$\underline{c}'\underline{x} \le \underline{b}'\overline{\underline{w}} = \underline{c}'\overline{\underline{x}}$, $\overline{\underline{x}}$ άριστη λύση του (Π)

$\underline{b}'\underline{w} \ge \underline{c}'\overline{\underline{x}} = \underline{b}'\overline{\underline{w}}$, $\overline{\underline{w}}$ άριστη λύση του (Δ)

$\overline{u}$ τιμή αντικειμενικής συνάρτησης (Δ)
$\overline{z}$ τιμή αντικειμενικής συνάρτησης (Π)

$$\overline{u} = b_1w_1 + \dots + b_mw_m = \overline{z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial b_i} = w_i$$

- Αν το (Π) είναι μη φραγμένο τότε το (Δ) δεν έχει εφικτή λύση.

F_x: σύνολο εφικτών λύσεων του (Π)
F_w: σύνολο εφικτών λύσεων του (Δ)

$\max\{\underline{c}'\underline{x} : \underline{x} \in F_x\} \to \infty$ (μη φραγμένο)

$\underline{w}$, $\underline{c}'\underline{x} \le \underline{b}'\underline{w}$, $\underline{x} \in F_x$

▸ Αν το (Π) έχει άριστη λύση, τότε και το (Δ) έχει άριστη λύση και μάλιστα οι αντίστοιχες τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων της είναι ίσες (Θεώρημα του δυϊσμού).

(Π)

$\max \underline{c}'\underline{x}$

$A\underline{x} = \underline{b}$

$\underline{x} \geq 0$

$\max z = \underline{c_I}'\underline{x_I} + \underline{c_{II}}'\underline{x_{II}}$

$(N, I)\begin{pmatrix} x_I \\ x_{II} \end{pmatrix} = \underline{b}$

$\underline{x_I}, \underline{x_{II}} \geq 0$

$\underline{x_{II}}$ βασικές μεταβλητές

(Δ)

$\min \underline{b}'\underline{w}$

$\begin{pmatrix} N^T \\ I \end{pmatrix} \underline{w} \geq \begin{pmatrix} c_I \\ c_{II} \end{pmatrix}$

$w_i \in \mathbb{R}$

Αν είναι B η βάση που αντιστοιχεί στην άριστη λύση του (Π), $\underline{c_B}$ το διάνυσμα των αντίστοιχων αντικειμενικών συντελεστών.
$\underline{w}' = (w_1, w_2, \ldots, w_m)'$, $\underline{w}' = \underline{c_B}' B^{-1}$ άριστη λύση του (Δ)

i) $\underline{w}$ εφικτή

ii) $\min \underline{b}'\underline{w} = \max \underline{c}'\underline{x}$

Αρχικό

c_{II}	$\underline{b}'$	N	I
	$\underline{c_{II}}'\underline{b}$	$\underline{c_{II}}'N - \underline{c_I}'$	$\underline{0}'$

Τελικό

$\underline{c_B}'$	$B^{-1}\underline{b}$	$B^{-1}N$	$B^{-1}I$
	$c_B' B^{-1}\underline{b}$	$\underline{c_B}'B^{-1}N - \underline{c_I}'$	$c_B' B^{-1} - c_{II}'$

$z_j - c_j \geq 0$

$\underline{c_B} B^{-1} N - \underline{c_I}' \geq \underline{0}'$

$\underline{c_B}' B^{-1} - \underline{c_{II}}' \geq 0'$, $\underline{w}' = \underline{c_B}' B^{-1}$

$\underline{w}'N - \underline{c_I}' \geq 0'$

$\underline{w}' - \underline{c_{II}}' \geq \underline{0}$

$N^T\underline{w} - \underline{c_I} \geq \underline{0}$

$\underline{w} \geq \underline{c_{II}}$

$u = \underline{b}'\underline{w} = \underline{w}'\underline{b} = \underline{c_B}' B^{-1} \underline{b} = z$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$\max x_1+x_2+x_3$	$\min 2w_1+2w_2 \Rightarrow u=4/3$
$w_1 \quad 2x_1+x_2+2x_3\leq 2$	$2w_1+4w_2\geq 1$
$w_2 \quad 4x_1+2x_2+x_3\leq 2$	$w_1+2w_2\geq 1$
$x_1,x_2,x_3\geq 0$	$2w_1+w_2\geq 1$
	$w_1,w_2\geq 0$

B	C_B	b	P_1 (1)	P_2 (1)	P_3 (1)	P_4 (0)	P_5 (0)
P_4	0	2	2	1	2	1	0
P_5	0	2	4	2	1	0	1
		0	-1	-1	-1	0	0
Τελικό							
P_3	1	2/3	0	0	1	2/3	-1/3
P_2	1	2/3	2	1	0	-1/3	2/3
		4/3	1	0	0	4/3	1/3

$\underbrace{1 \quad 0 \quad 0}_{\text{Δυϊκή λύση}}$ $\quad \underset{\uparrow}{4/3}\ w_1 \quad \underset{\uparrow}{1/3}\ w_2$

↘ κάτω από το μοναδιαίο.

$w_1=(z_4-c_4)+c_4=1/3$

$w_2=(z_5-c_5)+c_5=1/3$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$\max(15x_1+30x_2+20x_3)$	$\min 4w_1+3w_2+6w_3$	
$x_1+\quad +x_3\leq 4$	$w_1+0.5w_2+w_3\geq 15$	$w_1=7.5$
$0.5x_1+2x_2+x_3\leq 3$	$w_2+w_3\geq 50$	$w_2=15$
$x_1+x_2+2x_3\leq 6$	$w_1+w_2+2w_3\geq 20$	$w_3=0$
$x_1,x_2,x_3\geq 0$	$w_1,w_2,w_3\geq 0$	$u=7.5$

Simplex

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$\max(15x_1+10x_2)$	$\max(15x_1+10x_2)$	$\min 50w_1-20w_2$
$x_2\leq 50$	x_2+x_3	$-3/2\, w_2\geq 15$
$-\frac{3}{2}x_1+x_2\leq -20$	$x_1-\frac{3}{2}x_2 \quad -\frac{2}{3}x_4=\frac{40}{3}$	$w_1+w_2\geq 10$
$x_1-x_2\geq 0$	$x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$	$w_1,w_2\geq 0,\ w_2\leq -10$
		$w_2\geq 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$\min(x_1 - 2x_2) + 3x_3$	$-\max(-x_1+2x_2) - 3x_3$
$x_2 - 1/2 x_3 \leq 1/2$	$x_2 - 1/2 x_3 + \quad + x_5 = \frac{1}{2}$
$-x_2 \quad - 2x_4 \geq -8$	$x_2 \quad + 2x_4 \quad + x_6 = 8$
$-x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -10$	$x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \quad = 10$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

$\max 1/2 w_1 - 8w_2 - 10w_3$	
$-w_3 \leq 1$	
$w_1 - w_2 + w_3 \leq -2$	$w_1 = 0$
$-1/2 w_1 \quad - w_3 \leq 3$	$w_2 = 1$
$-2w_2 - 2w_3 \leq 0$	$w_3 = -1$
$w_1 \leq 0,\ w_2 \geq 0,\ w_3 \in \mathbb{R}$	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$\min 2x_1 + 3x_2$	$-\max -2x_1 - 3x_2$	$-\max -2x_1 - 3x_2 - Mx_5 - Mx_6$
$0.5x_1 + 0.25x_2 \leq 4$	$0.5x_1 + 0.25x_2 + x_3 = 4$	$0.5x_1 + 0.25x_2 + x_3 \quad = 4$
$x_1 + 3x_2 \geq 36$	$x_1 + 3x_2 \quad - x_4 = 36$	$x_1 + 3x_2 \quad - x_4 + x_5 = 36$
$x_1 + x_2 = 10$	$x_1 + x_2 \quad = 10$	$x_1 + x_2$
$x_1, x_2 \geq 0$	$x_i \geq 0$	

$\max 4w_1 + 36w_2 + 10w_3$

$0.5w_1 + w_2 + w_3 \leq 2$

$0.25w_1 + 3w_2 + w_3 \leq 3$

$w_1\ ?,\ w_2\ ?,\ w_3\ ?$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

(Π)	(Δ)
$\max 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$	$\min 15w_1 + 5w_2 + 10w_3$
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15$	$w_1 + \quad + 2w_3 \geq 3$
$2x_2 - x_3 \geq 5$	$3w_1 + 2w_2 + w_3 \geq 2$
$2x_1 + x_2 - 5x_3 = 10$	$2w_1 - w_2 - 5w_3 \geq 5$
$x_i \geq 0$	$w_1 \geq 0,\ w_2 \leq 0,\ w_3 \in \mathbb{R}$

$w_i = (\underline{C_B}' B^{-1})_i$

$$(W_1, W_2, W_3)\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} - 0 \geq 0$$

$(-W_2 \geq 0 \Rightarrow W_2 \leq 0)$

$Z_j - C_j = \underline{C_B}' B^{-1} \underline{P_j} - C_j = \underline{W}' \underline{P_j} - C_j$

$$(W_1, W_2, W_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 0 \geq 0, \quad W_1 \geq 0.$$

$$(W_1, W_2, W_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - (-M) \geq 0, \quad W_3 \in \mathbb{R}.$$

$\underline{W} = \underline{C_B}' B^{-1}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$\min(3X_1 + 2X_2 + X_3 + MX_6 + MX_7)$

$X_1 + X_2 + X_3 - X_4 + X_6 = 4$

$X_2 - X_3 + X_5 = 2$

$X_1 + X_2 + 2X_3 + X_7 = 6$

$X_i \geq 0, \; i = 1, \dots, 7.$

(Π)

$\min(3X_1 + 2X_2 + X_3)$

$X_1 + X_2 + X_3 \geq 4$

$X_2 - X_3 \leq 2$

$X_1 + X_2 + 2X_3 = 6$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

$X_1 = 0$

$X_2 = 0$

$X_3 = 2$

$Z = 6$

(Δ)

$\max(4W_1 + 2W_2 + 6W_3)$

$W_1 + W_3 \leq 3$

$W_1 + W_2 + W_3 \leq 2$

$W_1 - W_2 + 2W_3 \leq 1$

$W_1 \geq 0, \; W_2 \leq 0, \; W_3 \in \mathbb{R}$

$W_1 = 3$

$W_2 = 0$

$W_3 = -1$

$$(W_1, W_2, W_3)\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} - 0 \leq 0 \Rightarrow -W_1 \leq 0 \Rightarrow W_1 \geq 0$$

$$(W_1, W_2, W_3)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 0 \leq 0 \Rightarrow W_2 \leq 0.$$

$$(W_1, W_2, W_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - M < 0 \Rightarrow W_3 \in \mathbb{R}.$$